



## OTIMIZAÇÃO APLICADO À POROELASTICIDADE DINÂMICA USANDO MEC E AG

Niécio da Costa Anunciação Junior

Carla Tatiana Mota Anflor

engnjunior@gmail.com

anflor@unb.br

Programa de Pós Graduação em Integridade de Materiais de Engenharia - UnB

Grupo de Mecânica Experimental e Computacional - GMEC

Área Especial de Indústria, Projeção A, Gama – Setor Leste, CEP: 72.444-240, Distrito Federal, Brasil

**Resumo.** Este trabalho tem o objetivo de usar o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e um Algoritmo Genético (AG) para resolver um problema de poroelasticidade dinâmica, considerando a engenharia inversa. O problema inverso é formulado como um procedimento de otimização no qual um Algoritmo Genético determina o melhor conjunto de constantes do material. O procedimento de caracterização proposto apresenta uma metodologia para determinar as propriedades mecânicas das rochas através do processo de otimização de ajuste de curva, uma vez que a curva  $\times$  amplitude de frequência é conhecido. As equações governantes para o problema apresentado são introduzidas considerando as variáveis de tensão-deformação na formulação estabelecida por Biot para o problema de porosidade dinâmica. A metodologia mostrou boa precisão para determinar as propriedades mecânicas da rocha.

**Palavras-Chave:** Método dos Elementos de Contorno, Poroelasticidade, Otimização, Algoritmo Genético.

## 1 INTRODUÇÃO

O processo de desenvolvimento da sociedade tem se difundido com novas descobertas, e com a evolução da ciência, pertinentes ao avanço do conhecimento. Com base na capacidade de observação, experimentação e análise, o ser humano vem desenvolvendo teorias e modelos cada vez mais complexos e eficientes para resolver diversos tipos de fenômenos e comportamentos. Este tema tem sido muito recorrente na engenharia, onde exige do engenheiro uma alta capacidade de análise e síntese de projetos. A alta complexidade dos problemas e a disponibilidade cada vez mais crescente de recursos computacionais abrem espaços para utilização de análises mais abrangentes. E através destes recursos se sugere abordar o problema deste trabalho, no âmbito de problemas relacionados à Geotecnia. A análise está relacionada a conceitos da Mecânica dos Solos e teve como início estudos apresentados por Terzaghi (1925) na Teoria da Elasticidade e na Teoria de Análise Limite (Plasticidade). Posteriormente Biot (1956) apresentou a Teoria de Adensamento, que é a base para estudos relacionados à poroelasticidade do solo. Dentre os problemas relacionados à poroelasticidade podem ser citados os relacionados a adensamento de camadas de solo, escavações em meios porosos saturados (como a de um túnel), bombeamento (retirada) de fluido (petróleo ou água) por meios porosos saturados, entre outros.

O fenômeno de adensamento do solo, que consiste na queda de volume, por conta da baixa taxa de água ou ar (espaços vazios) na parte interna do solo, foi estudado por diversos cientistas, porém Terzaghi (1925) foi o propulsor e mais importante cientista a abordar o tema, sendo chamado de “pai da mecânica dos solos”. A propagação de ondas e adensamento do solo é objeto de estudo há muito tempo. Os cientistas Terzaghi (1936) e Gassmann (1951) forneceram resultados de propagação de ondas em meios porosos em baixa frequência (0-100 Hz), considerando a fase sólida e fluida como única. Já Biot (1956) refere-se ao estudo de adensamento do solo de Terzaghi como sendo um caso particular ao seu. Após alguns anos depois de analisar a propagação de ondas em meio poroelástico, Biot pôde desenvolver a teoria de adensamento dinâmico do solo. Tal pesquisador dividiu este estudo em duas partes (Biot 1956a e 1956b). Esta teoria foi dividida em duas partes onde a primeira tratou da propagação de ondas elásticas em um meio poroso saturado para baixas frequências, a segunda para altas frequências.

Através dos estudos apresentados por Biot (1956a e 1956b) foram observados dois tipos diferentes de propagação de ondas, as primárias e secundárias. São as primárias: as ondas de compressão ou longitudinais e as secundárias as de cisalhamento, distorção ou rotacional. A existência de onda lenta foi sujeita a especulações durante vários anos, até obter registro em laboratório sob condições experimentais controladas (Plona, 1980). Para descrição do meio poroso precisa-se de duas escalas, a primeira é a escala macroscópica, correspondente às dimensões do volume representativo, para o caso das ondas (sísmica), e ao comprimento da onda que se propaga; a segunda escala corresponde às dimensões dos poros e é a escala microscópica. O presente estudo trabalha na escala de segundo tipo, correspondente a escala microscópica.

Estes problemas podem ser representados através de formulações matemáticas, sendo assim passíveis de modelagem e manipulação através de métodos numéricos. Neste trabalho apresenta-se uma modelagem numérica de propagação de ondas, no contexto da Teoria de Poroelasticidade de Biot (1956) acoplada a teoria de adensamento de Terzaghi (1925), explorando a aplicação dos Métodos dos Elementos de Contorno (MEC) para problemas de adensamento de meios poroelásticos. E consiste no adensamento bidimensional em estado

plano de deformações, analisado através de subdivisão de intervalos de frequências de excitações ao longo do tempo.

As equações diferenciais de poroelasticidade foram transformadas em equações integrais, através da extensão do teorema de reciprocidade. É utilizado o MEC com elementos constantes para solucionar as equações integrais de poroelasticidade. A solução analítica foi apresentada por Cheng (1991) e a numérica a partir do MEC conforme proposto por Dominguez (1993). Neste sentido, um dos focos deste trabalho foi realizar um processo de otimização, e para este foi aplicada a otimização multiobjetivo com operador de processamento NSGA-II, a fim de se encontrar a melhor solução ao sistema e sobreposição das curvas analítica e numérica, minimizando a diferença que elas apresentaram, através das variáveis de comportamento mecânico do solo. Discussões da teoria serão apresentadas, bem como gráficos com os resultados que influenciaram na tomada de decisão.

## 2 POROELASTICIDADE DE BIOT ACOPLADA A TEORIA DE ADENSAMENTO DE TERZAGHI

As estruturas internas dos corpos porosos são comparáveis a um sólido homogêneo, embora em sua formação encontram-se grãos que não se encaixam totalmente, deixando espaços vazios. Os espaços podem estar totalmente cheios ou não por algum fluido como água, gás e óleo. Estes grãos (consolidados e cimentados) são chamados de matriz, e os espaços vazios chamados de poros. Um meio poroso tem volume definido no qual pode dividir-se em dois: o volume da matriz e o volume correspondente aos poros. A porosidade se define pela relação entre o volume dos poros e o volume total. Podendo ser classificada de duas maneiras: conectadas e não conectadas. Na teoria de poroelasticidade o meio poroso é considerado elástico linear e consideram-se os poros totalmente ocupados por um fluido. As observações feitas para este tópico foram às mesmas considerações nos estudos de Biot (1941). A tensão efetiva introduzida por Terzaghi (1923,1925) é definida como a parte em que regula a deformação do solo ou da rocha. Fazendo uma análise desta tensão, pode-se dizer que a ela pôde ser decomposta em termos, com soma de tensão eficaz e pressão nos poros, nesta soma é adicionado o coeficiente estabelecido por Biot, conforme pode ser visto na Eq. (1).

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \alpha p \delta_{ij} \quad (1)$$

Onde  $\sigma_{ij}$  são os componentes da tensão total,  $\sigma'_{ij}$  são os componentes da tensão efetiva,  $p$  é a poro-pressão (pressão do fluido nos poros),  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e  $\alpha$  é o coeficiente de Biot. Para meio isotrópico a tensão é escrita de acordo com Eq. (2).

$$\sigma = \sigma' + \alpha p \quad (2)$$

## 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 3.1 Equações básicas para poroelasticidade dinâmica

Seguindo a teoria de Biot (1956a), o equilíbrio das equações para poroelasticidade linear é expresso conforme Eq. (3) e Eq. (4).

$$\tau_{ij,j} + X_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}u_i + \rho_{12}U_i) + k \frac{\partial}{\partial t}(u_i - U_i) \quad (3)$$

$$\tau_{,j} + X'_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}u_i + \rho_{22}U_i) + k \frac{\partial}{\partial t}(u_i - U_i) \quad (4)$$

Onde  $\tau_{ij}$  é a tensão no sólido,  $\tau$  corresponde à tensão no fluido relativo à pressão no fluido  $p$  de acordo com Eq. (5).

$$\tau = -\beta p \quad (5)$$

Em que  $\beta$  é a porosidade,  $u_i$  e  $U_i$  são os deslocamentos sólidos e do fluido respectivamente,  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{12}$  e  $\rho_{22}$  são as densidades de massas e  $X_i$  e  $X'_i$  correspondem a força de corpo atuando no sólido e fluido, respectivamente. As relações entre as equações de equilíbrio lineares e as variáveis mecânicas podem ser vistos nas Eq. (6) para parcela de tensão no sólido e Eq. (7) para tensão no fluido.

$$\tau_{ij} = \left( \lambda + \frac{\alpha^2}{R} \right) \delta_{ij} e + 2\mu e_{ij} + \alpha \delta_{ij} \varepsilon \quad (6)$$

$$\tau = \alpha e + R \varepsilon \quad (7)$$

Onde  $\delta_{ij}$  é o Delta de Kronecker,  $e_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i})$  é a deformação do sólido,  $\varepsilon = U_{i,i}$  e  $e = u_{i,i}$  como dilatação do fluido e sólido, respectivamente, por fim as constantes elásticas  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  e  $R$ .

### 3.2 Formulação integral do contorno - Elementos Constantes

A formulação integral do contorno surge a partir da relação recíproca entre os termos de deslocamentos do sólido, condições de contorno de tração no sólido, tensão no fluido, condições de contorno de deslocamentos normais no fluido e corpo de forças em ambas as fazes. A representação integral das equações pode ser escrita para domínios bidimensionais sem condições de forças de corpo, de acordo com Eq. (8) e (9), onde  $J$  é definido pela Eq. (10).

$$c_{\alpha\beta} u_\alpha + \int_\Gamma \tau_{\alpha\beta}^* u_\alpha d\Gamma + \int_\Gamma \tau_\beta^* U_n d\Gamma = \int_\Gamma u_{\alpha\beta}^* t_\alpha d\Gamma + \int_\Gamma \tau U_{n\beta}^* d\Gamma \quad (8)$$

$$\int_\Gamma t_{\alpha 3}^* u_\alpha d\Gamma + \int_\Gamma \tau_3^* U_n d\Gamma = \int_\Gamma u_{\alpha 3}^* t_\alpha d\Gamma + \int_\Gamma \tau (U_{n3}^* - J X_\alpha'^* n_\alpha) d\Gamma + J c_{33} \tau \quad (9)$$

$$J = \frac{1}{i\omega b - \omega^2 \rho_{12}} \quad (10)$$

A solução fundamental para a parte sólida é escrita de acordo com a Eq. (11). E a solução fundamental para fluido de acordo com Eq. (12).

$$t_{\alpha j}^* = \left( \lambda e_j^* + \frac{\alpha}{R} \psi_{3j} \right) n_\alpha + 2\mu e_{\alpha j}^* \quad (11)$$

$$U_{nj}^* = J \left( \psi_{3j,\alpha} + \frac{1}{2\pi} \frac{r_{,\alpha}}{r} \delta_{3j} \right) n_\alpha + Z \psi_{\alpha j} n_\alpha \quad (12)$$

Onde  $Z = J(i\omega b + \omega^2 \rho_{12})$  e  $\psi$  corresponde ao tensor que auxilia a solução fundamental através de análise de ondas de dilatação e rotação e funções de Bessel. Usando notação vetorial, as integrais podem ser escritas de acordo com Eq. (13).

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* p d\Gamma \quad (13)$$

Onde  $u$  e  $p$  são os campos de vetores variáveis para deslocamento no sólido e tensão no fluido respectivamente conforme Eq. (14), e  $p^*$  e  $u^*$  são os tensores de soluções fundamentais de acordo com Eq. (15).

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \tau \end{bmatrix} \text{ e } p = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ U_n \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$p^* = \begin{bmatrix} t_{11}^* & t_{21}^* & -U_{n1}^* \\ t_{12}^* & t_{22}^* & -U_{n2}^* \\ t_{13}^* & t_{23}^* & -\hat{U}_{n3}^* \end{bmatrix} \text{ e } u^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{21}^* & -\tau_1^* \\ u_{12}^* & u_{22}^* & -\tau_2^* \\ u_{13}^* & u_{23}^* & -\tau_3^* \end{bmatrix} \quad (15)$$

Onde  $\hat{U}_{n3}^* = U_{n3}^* - J X_{\alpha}^* n_\alpha = (J \tau_{3,\alpha}^* + Z u_{\alpha 3}^*) n_\alpha$  e  $c^i$  corresponde a Eq. (16) para pontos fracos no contorno (singularidade fraca).

$$c^i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -J \end{bmatrix} \quad (16)$$

Considerando agora que o domínio do contorno em estudo é discretizado por elementos constantes, onde os valores de  $u$  e  $p$  são constantes ao longo do comprimento e igual quantidade de valores nodais, a Eq (13) pode ser escrita de acordo com a Eq. (17).

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} p^* d\Gamma \right\} u^j = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \right\} p^j \quad (17)$$

Onde cada integral estende-se ao longo de um seguimento de  $\Gamma_j$ , correspondendo ao elemento "j". Usando a notação tradicional para os Métodos de Elementos de Contorno a Eq. (17) pode ser reescrita de acordo com Eq. (18) ou como Eq. (19).

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N \hat{H}^{ij} u^j = \sum_{j=1}^N G^{ij} p^j \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^N H^{ij} u^j = \sum_{j=1}^N G^{ij} p^j \quad (19)$$

Para estas definições foram usados os parâmetros da Eq. (20).

$$\begin{aligned} H^{ij} &= \hat{H}^{ij} && \text{quando } i \neq j \\ H^{ij} &= \hat{H}^{ij} + c^i && \text{quando } i = j \end{aligned} \quad (20)$$

De uma forma resumida, pode ainda ser escrito de acordo com Eq. (21).

$$H u = G p \quad (21)$$

Onde  $H$  e  $G$  são matrizes de  $3N \times 3N$ . Observe que para cada nó  $u_1$  ou  $t_1$ ,  $u_2$  ou  $t_2$  e  $\tau$  ou  $U_n$  são conhecidas e consequentemente  $3N$  são desconhecidas. Portanto, o sistema de equações (20) pode ser reordenado, passando todas as incógnitas desconhecidas para o lado esquerdo. Este sistema pode ser visto conforme Eq. (22).

$$A X = F \quad (22)$$

onde  $A$  é o rearranjo das variáveis,  $X$  é o vetor das variáveis desconhecidas de  $u$  e  $p$ ,  $F$  são as variáveis conhecidas, obtida através da multiplicação das colunas correspondentes de  $H$  e  $G$ . A equação (22) agora pode ser resolvida e todas as variáveis do contorno serão calculadas e conhecidas.

## 4 OTIMIZAÇÃO

É o processo de otimizar, de tornar ótimo e de buscar uma solução a um dado problema. O processo de otimização aplica técnicas para seleção das melhores alternativas, com o propósito de alcançar os objetivos determinados. Consiste ainda no planejamento estratégico e adequado para uma gestão eficiente, visando obter um retorno dentro dos padrões determinados, encontrando um resultado ou conjunto de soluções ótimas (Deb et al., 2000).

A programação de otimização aplicada neste trabalho foi a linear, onde consistiu na técnica de pesquisa operacional, no qual a função objetivo e as restrições (definidos por intervalo de busca) são todas lineares. Os valores das variáveis de projetos foram maximizados ou minimizados através da aplicação da função objetivo, dentro de um determinado domínio. De acordo com Luenberger (1984), qualquer problema de programação linear pode ser representado por uma “formulação padrão”: Conforme a Eq. (23).

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize } f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] \\
& \text{Sujeito à } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\
& \text{Intervalo } d_1 \leq f(x) \leq d_2
\end{aligned} \tag{23}$$

Onde  $f(x)$  é a função objetivo,  $x$  são as variáveis ou incógnitas a serem otimizadas,  $a$  são as constantes do problema poroelástico e  $d$  a definição do intervalo de busca do operador de otimização.

## 5 OTIMIZAÇÃO UTILIZANDO ALGORITMO GENÉTICO

A otimização via AG é o ato de se encontrar um resultado ou conjunto de soluções ótimas para dadas circunstâncias, ou seja, é a procura de um melhor resultado para uma determinada função ou conjunto de funções conforme Takahama (2004). O método imita os processos biológicos baseado na evolução das espécies, onde os procedimentos são basicamente: seleção natural, pareamento, crossover e mutação. Na implementação numérica foi criada uma população inicial aleatória, contendo uma diversidade suficiente para que combinem características á produzir novas populações, os termos básicos do Algoritmo Genético podem ser vistos na tabela 1.

**Tabela 1 - Termos básicos AG**

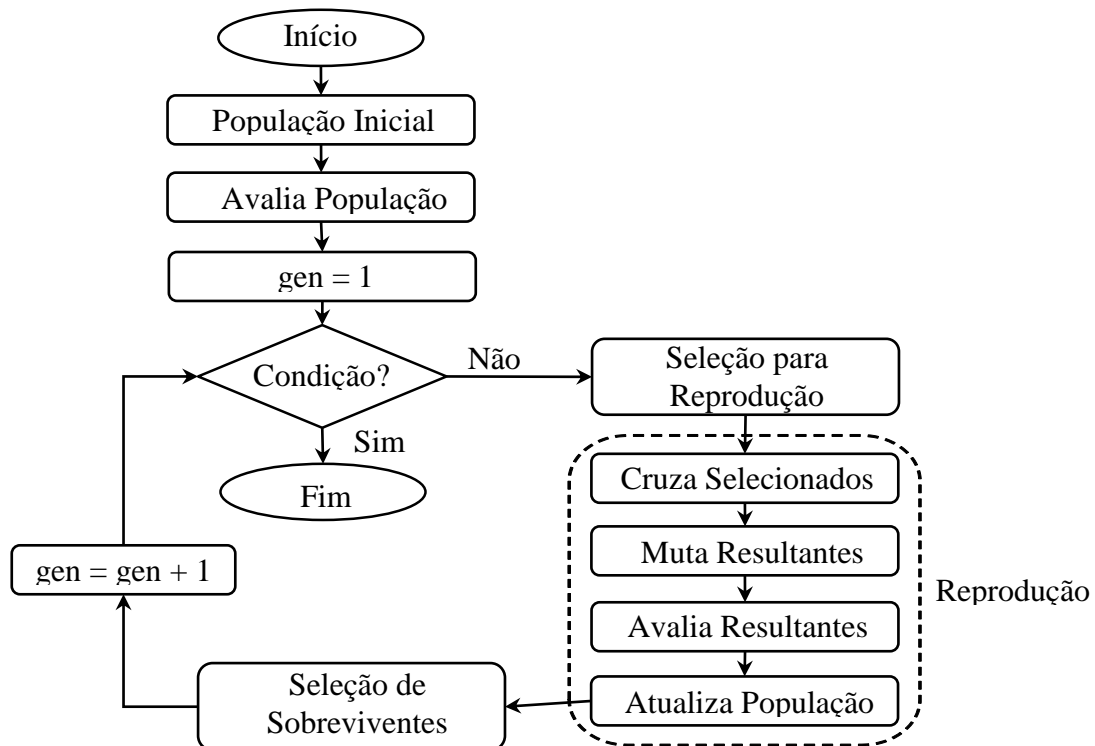
Nomenclatura	Termos oriundos da genética aplicadas ao AG
Cromossomo	Cadeia de caracteres (Alelo) que representa alguma informação das variáveis do problema, sendo que cada um desses cromossomos pode representar uma possível solução.
Gene	Descreve cada uma das variáveis do problema
População	Conjunto de possíveis soluções
Geração	Número da iteração que o algoritmo genético executa
Fenótipo	Representa a informação contida nos cromossomos
Função objetivo	Função a ser minimizada, com informações numéricas com desempenho de cada cromossomo da população, também conhecida como função de aptidão ou fitness.

Com base em algumas aplicações bem sucedidas de problemas de otimização via NSGA-II encontradas na literatura, o “*Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm – NSGA-II*” foi escolhido neste trabalho para o processo de otimização.

É importante ressaltar que este algoritmo implementa uma metodologia em que se aplicam simultaneamente conceitos sobre dominância e diversidade, tornando este algoritmo uma ferramenta eficiente no processo de busca e otimização da função objetivo (Deb et al., 2000).

A função objetivo é essencial para propagar as gerações futuras e os melhores resultados de cada geração. Neste caso de aplicação do NSGA II somente as melhores soluções

continuarão a existir para as próximas gerações, e todo procedimento do AG pode ser visto na figura 1.



**Figura 1 – Estrutura AG**

O operador de pareamento define os pares usando as melhores características dos indivíduos através das populações geradas e avaliadas. O próximo passo é o cruzamento, que consiste em criar novas topologias (famílias), neste trabalho adotou-se um pareamento baseado na Teoria da Evolução das Espécies de Charles Darwin do tipo *crossover*. Este procedimento gera dois filhos para cada acasalamento, onde estes serão membros para as próximas gerações. O *crossover* é determinado com porcentagens cromossômicas dos pais, ou seja, cada filho após o cruzamento dos pais carrega informações genéticas de ambos. O mesmo procedimento é repetido, porém com indivíduos carregando características diferentes da primeira geração, até ser encontrado o indivíduo que carrega melhor informação genética. O último operador é o de mutação, no qual é responsável por alterar aleatoriamente uma pequena porção dos cromossomos, fazendo com que o campo de busca não fique preso a um mínimo local. Logo após o operador seleciona os melhores indivíduos por uma classificação dos sobreviventes através de uma função objetivo, estes geram uma nova população e recomeça o ciclo até que a função objetivo seja alcançada.

## 5.1 Variáveis de projeto: constantes de comportamento poroelástico

Estas constantes lidam principalmente com a parte volumétrica de um material poroso isotrópico e linear. As descrições destes materiais tem sido objeto de muitas formulações diferentes, e estas aqui apresentadas seguem os padrões de Detournay e Cheng (1993). As relações para apresentação destas constantes foram tratadas em meio totalmente completo por fluido, onde as contribuições individuais das partes sólidas e líquidas são obtidas a partir de formulações micromecânicas. A seguir são apresentadas as constantes do contínuo poroelástico, e a obtenção dos testes laboratoriais que as caracterizaram pode ser visto em Rice e Cleary (1976). As variáveis de projeto são armazenadas em um vetor



$\{E, G, \nu, \nu_u, B, \alpha, R, k\}$ , o qual será maximizado ou minimizado durante o processo de otimização. A importância de cada uma destas variáveis no problema de poroelasticidade serão apresentadas. O processo de otimização neste trabalho é classificado como sem restrição uma vez que o espaço de busca para cada uma das variáveis de projeto foi definido conforme tabela 2.

Tabela 2 – Intervalo de busca

	Mínimo	Máximo
$G$	$1.5 \times 10^{10}$	$6.0 \times 10^9$
$\nu$	0.15	0.25
$\nu_u$	0.31	0.34
$B$	0.50	0.85
$k$	$4.0e^{-4}$	$8.0e^2$
$\phi$	0.01	0.26

### 5.1.1 Módulo de elasticidade linear

O módulo de elasticidade ( $E$ ) mede a relação tensão - deformação obtida em um teste de tração ou compressão. Para pequenos valores de tensão e deformação, esta relação pode ser considerada constante (materiais homogêneos e isotrópicos) conforme Eq. (24).

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\sigma_{22}}{\varepsilon_{22}} = \frac{\sigma_{33}}{\varepsilon_{33}} \quad (24)$$

### 5.1.2 Módulo de cisalhamento

O módulo de cisalhamento ( $G$ ) mede a relação entre uma tensão de cisalhamento e a deformação angular por ela produzida, e pode relacionar-se ainda com os módulos de elasticidade linear e Poisson drenado, podendo ser visto de acordo com Eq. (25).

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (25)$$

### 5.1.3 Coeficiente de Poisson

O coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) mede a relação entre as deformações transversais e longitudinais, em relação à direção do carregamento em um teste de tração uniaxial. Esta expressão pode ser vista conforme Eq. (26).

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \quad (26)$$

Valores típicos para o módulo de Poisson das rochas encontram-se na faixa de 0,15 a 0,45.

### 5.1.4 Coeficiente de Poisson drenado

Bem como para o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), o Poisson drenado ( $\nu_u$ ) também mede a relação entre a deformação transversal e a deformação longitudinal em um teste de tração uniaxial. A diferença entre eles é que, para o Poisson drenado ( $\nu_u$ ), não é permitido um fluxo de fluido para dentro ou para fora da amostra (por isso a titulação de drenado). O valor para este coeficiente drenado é no máximo 0,5. Este limite é atingido quando ambos os constituintes da amostra (sólido e líquido) são incompressíveis. E o limite inferior é atingido quando o fluido dos poros é altamente compressível. Ambos Poisson quanto Poisson drenado podem ser vistos em Skempton (1954)

### 5.1.5 Coeficiente de Skempton

Também conhecido como coeficiente de pressão de poro, ele mede a relação entre uma variação de pressão de poro e a variação de tensão hidrostática na amostra, sob condições não drenadas. Esta formulação pode ser vista detalhadamente em Skempton (1954), e a Eq. (27) expressa esta expressão. Este coeficiente é uma grandeza adimensional, e seu valor está entre 0 e 1.

$$B = -\frac{3\Delta p}{\Delta\sigma_{kk}} \quad (27)$$

### 5.1.6 Coeficientes de Biot

São módulos volumétricos drenados ( $\alpha$  e  $R$ ) medem a relação entre a tensão hidrostática aplicada e a variação volumétrica, decorrente por unidade de volume do material. A tensão efetiva de Biot pode ser expressa conforme Eq. (28).

$$\alpha = \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1 - 2\nu)(1 + \nu_u)} \quad (28)$$

O coeficiente constitutivo poroelástico ( $R$ ) pode ser visto em Biot e Willis (1956) conforme expresso pela Eq. (29).

$$R = \frac{2\phi^2 GB^2 (1 - 2\nu)(1 + \nu_u)^2}{9(\nu_u - \nu)(1 - 2\nu_u)} \quad (29)$$

### 5.1.7 Coeficientes de Permeabilidade

O coeficiente de permeabilidade ( $k$ ) mede o grau de resistência oferecido por um material poroso em relação à passagem de um determinado fluido, ou seja, mede a relação entre o diferencial de pressão aplicado a uma amostra de rocha e a vazão de fluido correspondente. A permeabilidade depende das características da rocha, principalmente da porosidade e dos canais que unem os poros, e da viscosidade do fluido. Esta relação pode ser vista na Eq. (30). Onde  $\lambda$  é a permeabilidade intrínseca e  $\mu$  a viscosidade do fluido.

$$\kappa = \frac{\lambda}{\mu} \quad (30)$$

## 5.2 Função Objetivo

A função objetivo está relacionada com o erro RMS (*Root Mean Square*), correspondendo a raiz quadrada do erro médio. Este erro é uma relação entre os deslocamentos obtidos entre as soluções otimizadas e solução analítica, através da minimização dos valores da função objetivo. A função então pode ser vista na Eq. (31). E através da minimização da função objetivo ocorre uma aproximação dos valores das variáveis de projetos, correspondendo então a uma aproximação das propriedades mecânicas do solo, classificando assim o tipo de solo em trabalho.

$$erro\_RMS = \sqrt{\frac{(YY - Y)^2}{YY}} \quad (31)$$

As variáveis  $YY$  são os deslocamentos para a solução analítica apresentada por Cheng (1991) e  $Y$  são os deslocamentos do processo de otimização. Para cada iteração são calculados novos deslocamentos, e estes deslocamentos são graficados em curvas. Se estas curvas durante a verificação se sobrepuserem, representam então os mesmos valores nas variáveis de entrega, caracterizando o mesmo tipo de propriedades mecânicas para o solo. A figura 2 demonstra o esquema das subrotinas desenvolvidas para o processo de otimização. O processo de otimização inicia ao avaliar um grande conjunto de variáveis de projeto através do MEC para a solução do problema de poroelasticidade. Os deslocamentos do domínio associados à suas respectivas frequências são então calculados. Empregando a eq. (31) determina-se o erro RMS e avalia-se a função objetivo. Se o critério de parada for alcançado o processo é interrompido e a solução é salva. Caso contrário o processo continua até que o critério de parada seja satisfeito. O critério de parada foi definido em erro RMS  $\leq 0,025$ .

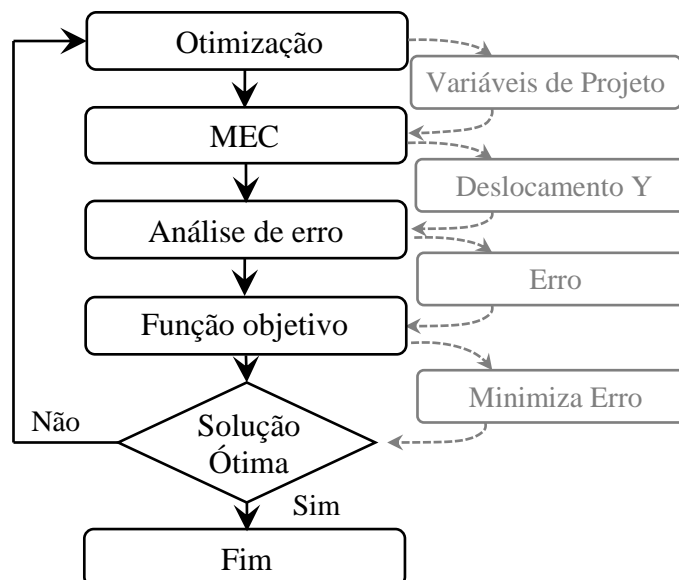


Figura 2 - Estrutura de programação

## 6 PROBLEMA

Cheng (1991) resolveu investigar um modelo de tensão em excitação no topo de uma coluna unidimensional saturado por um fluido e observar o deslocamento vertical de acordo com a carga aplicada (Dinâmico), este modelo estudado por Cheng é apresentado na figura 3 com três possibilidades de excitações: tensão e pressão no topo da coluna e deslocamento na parte inferior. Estas excitações foram analisadas separadamente por Cheng (1991) e será apresentada neste trabalho somente excitação de deslocamentos.

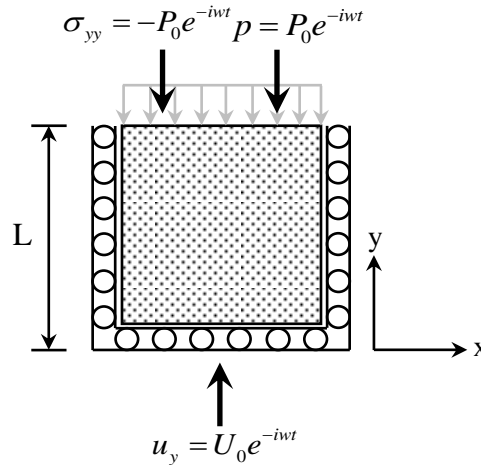


Figura 3 - Coluna de solo saturado sobre carregamento dinâmico

Foi assumida no topo da coluna uma tensão harmônica normal de  $-P_0 e^{-i\omega t}$  e superfície drenada. A parte inferior e os lados foram considerados como rígidos, sem atritos e impermeáveis. As condições de contorno para o problema é apresentado de acordo com Eq. (32).

$$\begin{aligned} \tilde{u}_y &= 0 ; \quad \tilde{q}_y = 0 \quad \text{para } y = 0 \\ \tilde{\sigma}_{yy} &= -P_0 ; \quad \tilde{p} = 0 \quad \text{para } y = L \end{aligned} \quad (32)$$

A solução exata para o sistema poroelástico unidimensional em termo de deslocamento vertical pode ser obtida através da Eq. (33) seguindo de alguns operadores.

$$\frac{E_s \tilde{u}_y}{P_0 L} = \frac{d_3 \left[ e^{-\lambda_1(L-y)} - e^{-\lambda_1(L+y)} \right]}{L(\lambda_3 d_1 - \lambda_1 d_3)(1 + e^{-2\lambda_1 L})} - \frac{d_1 \left[ e^{-\lambda_3(L-y)} - e^{-\lambda_3(L+y)} \right]}{L(\lambda_3 d_1 - \lambda_1 d_3)(1 + e^{-2\lambda_3 L})} \quad (33)$$

$$E_s = \frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)} \quad (34)$$

$$d_i = \frac{E_s \lambda_i^2 + \omega^2 (\rho - \beta \rho_f)}{\lambda_i (\alpha - \beta)} \quad (35)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{-B_0 + \sqrt{B_0^2 - 4A_0C_0}}{2A_0}} ; \lambda_1 = \sqrt{\frac{-B_0 - \sqrt{B_0^2 - 4A_0C_0}}{2A_0}} \quad (36)$$

$$A_0 = \frac{E_s \beta}{\omega \rho_f} ; B_0 = \frac{\omega \beta (\rho - \beta \rho_f)}{\rho_f} + \frac{E_s \omega \phi^2}{R} + \omega (\alpha - \beta)^2 \text{ e } C_0 = \frac{\omega^3 \phi^2 (\rho - \beta \rho_f)}{R} \quad (37)$$

Onde  $E_s$  é o módulo de elasticidade drenado,  $\omega$  é a excitação de frequência,  $\rho$  são as densidades do solo ( $\rho_s$  é a densidade do sólido,  $\rho_f$  é a densidade do fluido e  $\rho_a$  é a densidade adicional) e  $\lambda_1$  são as características de dilatação e dissipação das ondas em alta velocidade e  $\lambda_3$  para baixa velocidade. Ondas de segundo tipo podem ser vista em Biot (1956a), assim como as características de dissipação das ondas apresentadas aqui. Para o cálculo das rotinas  $A_0$ ,  $B_0$  e  $C_0$  é preciso calcular o coeficiente de tensão efetiva de Biot  $\alpha$  e coeficiente constitutivo poroelástico  $R$  e o campo de força  $\beta$  obtida através da dependência de frequência, se o material apresentar comportamento viscoelástico, conforme apresentado por Biot (1956c). A equação do campo de força pode ser visto na Eq. (38).

$$\beta = \frac{\omega \phi^2 \rho_f k}{i \phi^2 + \omega k (\rho_a + \phi \rho_f)} \quad (38)$$

Para esta análise foram utilizadas seis variáveis como propriedades que correspondente às propriedades mecânicas do solo do arenito de Berea. Estas variáveis correspondem a  $G = 6.0 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\nu = 0,2$ ;  $\nu_u = 0,33$ ;  $k = 1.9 \times 10^{-10} \text{ m}^4 / \text{N} \cdot \text{s}$ ;  $B = 0,62$ ;  $\phi = 0,19$ ;  $\rho_s = 2,800 \text{ kg/m}^3$ ;  $\rho_f = 1,000 \text{ kg/m}^3$ ;  $\rho_a = 150 \text{ kg/m}^3$  e comprimento da coluna de  $L = 1$ . Estas propriedades foram apresentadas por Rice & Cleary (1976) em estudo denominado como algumas soluções básicas de difusão de tensão para meios poroelásticos saturados com componentes compressíveis. Dominguez (1993) apresentou uma formulação de MEC em domínio dinâmico para problemas poroelásticos, iniciando pelas análises dos coeficientes de Biot (1956) e formulações de equações integrais de contorno em termos de deslocamentos sólidos e tensão no fluido. Selvadurai (1996) também apresenta uma análise de ondas para meios poroelásticos, aplicando as definições de Cheng (1991) e Dominguez (1993). Para validar o sistema apresentado por Dominguez (1993) e aplicar a formulação proposta por Biot (1956), foi realizado cálculo dos deslocamentos verticais obtidos através da excitação no topo da coluna. As soluções numéricas obtidas foram então analisadas e comparadas com solução analítica apresentada por Cheng (1991), usando os mesmos conjuntos de materiais, correspondente às propriedades mecânicas do solo, definidas por Rice & Cleary (1976).

A mesma análise utilizando os princípios da teoria de Biot foi apresentada e analisada por Selvadurai (1996) também através da aplicação dos Elementos de Contorno para propagação de ondas em meio poroelástico saturado, com a mesma propriedade mecânica do solo. Através da análise foram encontrados os picos de ressonância para baixa frequência de ordem natural  $\omega_n = (2n-1)\omega_1$ , sendo  $n = 1, 2, 3, \dots$ . E a figura 3 demonstra a curva da solução numérica sobrepondo a solução a analítica. Os resultados são plotados em valores absolutos de deslocamento normalizado no topo da coluna  $\tilde{u}_y(L)E_u/P_0L$  versus a frequência adimensional  $\omega^* = \omega/\omega_1$ , onde  $\omega_1$  é a primeira frequência de ressonância baseada nas

propriedades do material conforme Eq. (39). Segundo Selvadurai (1996) para frequências abaixo da primeira frequência natural, o deslocamento adimensional aproxima os valores dos deslocamentos poroelásticos ao comportamento elástico, e  $E_u$  é o módulo de elasticidade drenado, conforme Eq. (40).

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E_u}{\rho}} \quad (39)$$

$$E_u = \frac{2G(1-\nu_u)}{(1-2\nu_u)} \quad (40)$$

O problema inicialmente apresentado por Selvadurai (1996) aplicando as definições indicadas por Dominguez (1993) foi definido em 24 elementos constantes, 4 pontos de Gauss e um conjunto discreto de 44 frequências. A figura 4 apresenta a sobreposição das curvas até o nó  $\omega = 2.5 \omega_1$  onde a partir deste ponto é visível um pequeno deslocamento da solução numérica, este por influência das características mecânicas do solo.

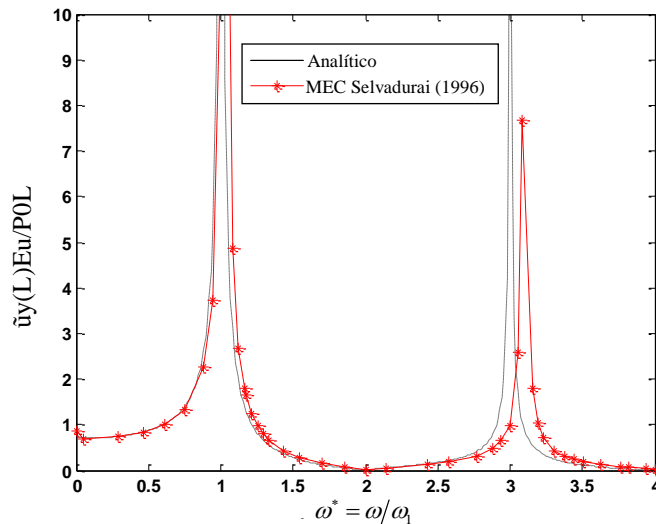


Figura 4 - Deslocamento no topo da coluna (tensão de excitação)

O deslocamento da curva analítica e numérica pode ser minimizado aplicando uma Função de Raiz Quadrada de Erro Médio (*Root Mean Square Error*), esta função pode ser visto na e Eq. (41) do erro RMS.

$$erro\_RMS = \sqrt{\frac{(YY - Y)^2}{YY}} \quad (41)$$

Onde  $YY$  representa os deslocamentos da solução numérica e  $Y$  os deslocamentos da solução analítica.

## 7 RESULTADOS

A fim de sobrepor as curvas de respostas, para se definir os valores exatos das propriedades mecânicas do solo, e analisar o erro RMS pela raiz quadrada do erro médio nó

por nó, fez-se uma redefinição do conjunto de frequências em 327, a geometria discretizada em 32 elementos constantes e 6 pontos de Gauss. Esta redefinição foi necessária para que as curvas pudessem ficar melhor definida e os deslocamentos em picos de ressonâncias melhor apresentadas. As entradas utilizadas foram as mesmas apresentadas por Cheng (1991) e Dominguez (1993). E as curvas obtidas tiveram comportamento de acordo com figura 5.

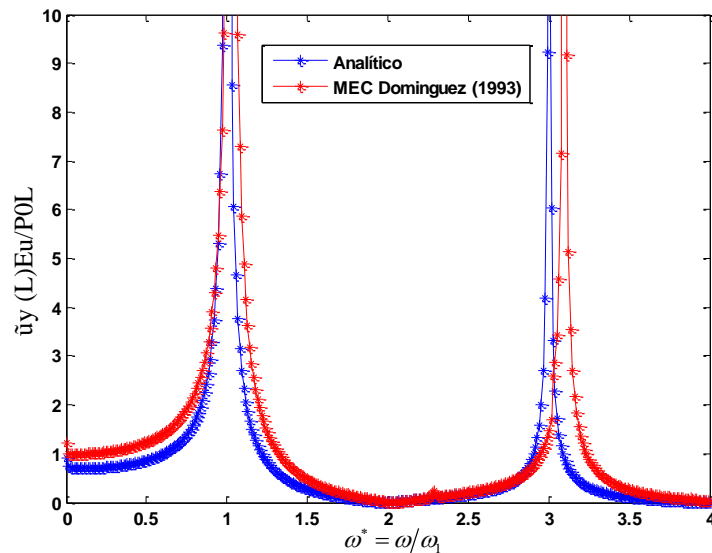


Figura 5 - Deslocamento no topo da coluna (tensão de excitação)

O erro RMS encontrado entre os nós foi de 0.690385. Após a obtenção das curvas, foi aplicado o processo de otimização para que as mesmas se sobreponham e apresentem um erro igual ou aproximado à zero. Durante a modelagem, as variáveis então foram declaradas e o processo de otimização operou em 10 mil iterações, encontrando a melhor entre todas na iteração 5298. O conjunto de soluções ótimas para um problema multiobjetivo é chamado de fronteira de Pareto. Esta técnica de tomada de decisão permite selecionar e priorizar um número pequeno de itens capazes de produzir grande efeito na melhoria dos processos. O conjunto das soluções ótimas é aplicado no contexto e representa o conjunto dos controladores que fornecem um desempenho ótimo. O comportamento da função de Pareto pode ser visto na figura 6.

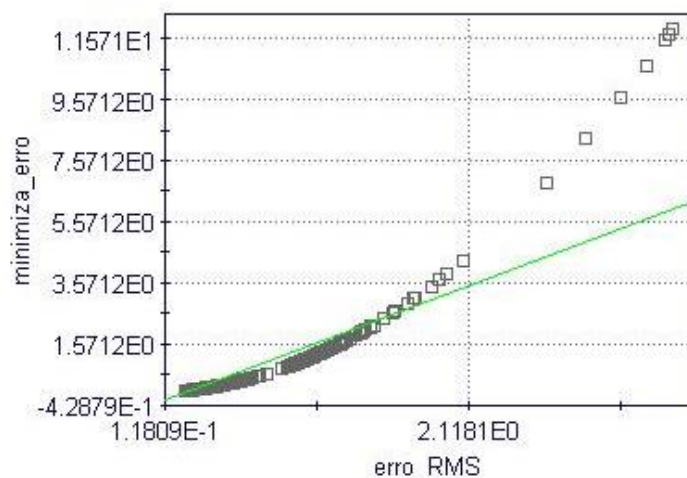


Figura 6 - Função de Pareto do processo de otimização

A permeabilidade ( $k$ ) é uma das propriedades que mais influenciaram no comportamento do sistema. Devido estar relacionada com a quantidade de poros, interligação entre eles, ser a propriedade em permitir o escoamento da matriz, e influenciar diretamente na percolação do fluido. Após o processo de otimização atingir os critérios de parada, os parâmetros otimizados estão apresentados na tabela 3, com um comparativo com as variáveis iniciais.

Tabela 3 – Comparativo entre as variáveis

Variaveis	Intervalo de busca	Intervalo de busca	Analítico	Otimizado
$G$	$6 \times 10^9$	$6.8 \times 10^9$	$6 \times 10^9$	$5.95 \times 10^9$
$\nu$	0.20	0.18	0.20	0.20
$\nu_u$	0.33	0.28	0.33	0.31
$B$	0.62	0.50	0.62	0.61428
$k$	$1.9e^2$	$5.6e^0$	$1.9e^2$	$9.5400e^{-1}$
$\phi$	0.19	0.19	0.19	0.195

Quando o processo de otimização atingiu o critério de parada o valor do erro RMS obtido para as curvas numéricas foram de 0.02509069. As curvas das soluções ficaram de acordo com a com a figura 7.

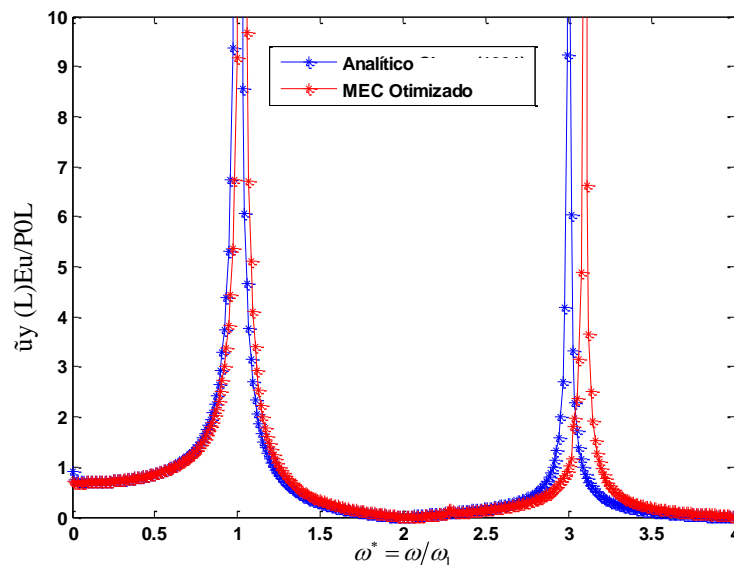


Figura 7 - Sobreposição das curvas

## 8 CONCLUSÃO

O principal objetivo deste trabalho consistiu em ajustar as variáveis de projetos  $G$ ,  $B$ ,  $k$ ,  $\nu$ ,  $\nu_u$  e  $\phi$  como controladores as propriedades mecânicas do solo. Os resultados encontrados para todas as frequências no domínio dinâmico permitiram o desenvolvimento de



uma nova curva, e a partir desta, pode-se calcular a diferença entre as curvas analítica e numérica. A contextualização destas representações aplicadas ao MEC, a integração entre a análise e a otimização multiobjetivo e o Algoritmo Genético NSGA-II, demonstraram ser eficiente para a realização do processo de otimização, pois pôde-se avaliar os comportamentos das variáveis. É importante ressaltar que este é um problema convexo, neste sentido o uso do algoritmo heurístico de análise pode encontrar um valor melhor ou pior no processo. Para uma sobreposição total das curvas, sugere-se que aumente o número total de iterações. Os resultados desenvolvidos são considerados satisfatórios no processo, pois houve uma diminuição considerável do erro entre elas.

## REFERÊNCIAS

- Biot, M. A., Willis, D. G. (1956). "The elastic coefficients of the theory of consolidation". J. Appl. Mech., 24,594-601.
- Biot, M. A. (1956a). "Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. low- frequency range". Journal of Applied Physycs. Nr 28. Pp. 168-178.
- Biot, M. A. (1956b). "Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. high- frequency range". Journal of Applied Physycs. Nr 28. Pp. 179-191.
- Cheng, A. H. D., Badmus, T., Beskos, D. E. (1991). "Integral equation for dynamic poroelasticity in frequency domain with bem solution". Journal of Engineering Mechanics, 117(5), 1136-1157.
- Coussy, O. (2004). "Poromechanics". Wiley, Chichester, 2004.
- Deb, K.; Agrawal, S.; Pratap, A.; Meyarivan, T. (2000). "A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: nsga-ii". Kangal Report 200001, Indian Institute of Technology, Kanpur, India.
- Detournay, E. & Cheng, A.H.-D. (1993). "Fundamentals of poroelasticity," chapter 5 in comprehensive rock engineering: principles, practice and projects, Vol. II, Analysis and Design Method, Ed. C. Fairhurst, Pergamon Press, Pp. 113-171.
- Dominguez, J. (1993). "Boundary elements in dynamics". Wit Press.
- Gassmann, F. (1951). "Elasticity of porous media". Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft, 96, 1-23.
- Geertsma, J. (1957). "A remark on the analogy between thermoelasticity and the elasticity of saturated porous media". Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol 6, Pp.13-16.
- Luenberger, D. G., & Ye, Y. (1984). "Linear and nonlinear programming" (Vol. 2). Reading, MA: Addison-wesley.
- Rice, J. R., Cleary, M. P. (1976). "Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents." Reviews of Geophysics and Space Physics, V.14, N.2, P.227-41.
- Plona, T. J. (1980). "Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies". Appl. Phys. Lett., 36:259-261.
- Selvadurai, A.. P. S.(1996). Mechanics of poroelastic media. In Antes, H., & Wiebe, T. "Analyses of waves in 3-d poroelastic media". (Pp. 371-387). Springer Netherlands.

- Skempton, A. W. (1954). "The pore pressure coefficients A and B". *Géotechnique*, 4, 143-147.
- Takahama, T., & Sakai, S. (2004). "Constrained optimization by  $\alpha$  constrained Genetic Algorithm (AGA)". *Systems and Computers In Japan*, 35(5), 11-22.
- Terzaghi, K. (1936). "The shearing resistance of saturated soils and the angle between the planes of shear". *Proceedings of International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Pp. 54-56.
- Terzaghi, K. (1925). "Erdbaumechanik Auf Bodenphysikalischer Grundlage". Deuticke, Leipzig.